

Numere reale. Intervale de numere reale.

1. a) Să se determine $x \in \mathbf{Z}$ astfel încât $\sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbf{Z}$.
b) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \in \mathbf{N}$.
2. Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{30-2\sqrt{n+1}}$ este număr natural.
3. Determinați toate numerele de două cifre \overline{ab} astfel încât numărul $\sqrt{2(a+b)+\overline{ab}+\overline{ba}}$ să fie număr natural.
4. Dacă $n \in \mathbf{N}^*$, arătați că $A \in \mathbf{N}$, unde $A = \sqrt{\underbrace{444\dots4}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{888\dots8}_{n \text{ cifre}}}$.
5. Știind că $(|2-a|+b)\sqrt{2} = b|1-\sqrt{2}|+2$, să se determine $a, b \in \mathbf{Q}$.
6. Calculați $S = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{1000}}$.
7. Arătați că $\frac{11}{\sqrt{28}} + \frac{17}{\sqrt{70}} + \frac{29}{\sqrt{208}} > 6$.
8. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției p : $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \dots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$.
9. Fie $a = \sqrt{6-\sqrt{35}} - \sqrt{6+\sqrt{35}}$. Calculați $(a + \sqrt{10})^{2005}$.
10. Se dau numerele reale $A = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ și $B = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. Să se arate că $|A+B| = \sqrt{2}$ și să se calculeze $\max\{A, |B|\}$.
11. Dacă x și y verifică relația $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$, atunci $x \in [-3; 7]$ și $y \in [-6; 4]$.
12. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ pentru care $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + 2y - 3z) = 2$. Să se afle căror intervale aparțin numerele x, y, z .
13. Arătați că numărul real $A = \sqrt{n-\sqrt{2n-1}} + \sqrt{n+\sqrt{2n-1}}$ aparține intervalului $(\sqrt{4n-3}; \sqrt{4n-1})$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

Numere reale. Operații cu numere reale reprezentate prin litere.

1. Fie $E = a^2 + b^2 + c^2 - a + 2b - 6c + 8$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.
 - a) Să se determine valoarea minimă a lui E .
 - b) Arătați că dacă $E = 0$, atunci $a \in [-1 ; 2]$, $b \in [-2,5 ; 0,5]$ și $c \in [1,5 ; 4,5]$.
2. a) Arătați că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$.
b) Demonstrați că pentru orice număr real x are loc inegalitatea:
 $\sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 + 49} + \sqrt{x^2 + 64} \geq (2x + 13)\sqrt{2}$.
3. Demonstrați că dacă $xyz = 1$, atunci $\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1$.
4. Fie x, y, z numere întregi distincte două câte două astfel încât $xy + yz + xz = 26$. Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$.
5. a) Descompuneți în factori expresia $E(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.
b) Arătați că $E(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și găsiți valoarea lui x pentru care $E(x) = 0$.
6. Aflați valoarea minimă a expresiei $E(x) = (x + 1)(x - 4)(x^2 - 3x + 8) + 40$, unde $x \in \mathbf{R}$.
7. Determinați toate tripletele de numere reale a, b, c care verifică egalitatea
 $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^2} = 12$.
8. Se dau numerele reale nenule a, b, c . Să se arate că
 $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} = \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + ca + a^2}$.
9. a) Demonstrați că $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, oricare ar fi $k \geq 1$.
b) Demonstrați că
 $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.
10. Să se arate că dacă inversul sumei a trei numere este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puțin două dintre numere au același modul.

Probleme date la olimpiadele de matematică - Etapa locală

1. Se dă un cub ABCDA'B'C'D' cu latura de 8 cm. Fie E mijlocul muchiei BB'. Aflați:

- a) $m(\widehat{AB', BD})$
- b) sinusul unghiului format de planele (A'BD) și (BC'D)
- c) $d(E, (ACC'))$

(Buzău, 2005)

2. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere raționale nenule astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, atunci

numărul $A = \left(\frac{xy}{z} + 1\right)\left(\frac{yz}{x} + 1\right)\left(\frac{xz}{y} + 1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{A} \in \mathbf{N}$.

(Bihor, 2005)

3. a) Să se arate că $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x și y .

b) Arătați că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{4} + 3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(Bihor, 2005)

4. a) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstrați că $E(a, b, c) < 0$, unde $E(a, b, c) = (c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+1)(3x+5)(3x+4)^2 = 4$.

(Sibiu, 2005)

5. Se consideră numerele reale pozitive x, y, z . Arătați că :

a) dacă $x \cdot y \cdot z = 1$, atunci $(x+y)z^2 + (y+z)x^2 + (z+x)y^2 \geq 6$.

b) dacă $x + y + z = 1$, atunci $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \leq \frac{1}{4}$.

(Sibiu, 2005)

6. Se dă un triunghi ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Fie S un punct din spațiu, $S \notin (ABC)$, astfel încât planele (SAB), (SBC) și (SAC) formează cu planul (ABC) unghiuri congruente de măsură 60° . Să se calculeze :

a) distanța de la punctul S la planul (ABC)

b) ariile triunghiurilor SAB, SBC și SAC.

(Bihor, 2005)

7. Se dă un romb ABCD cu $AB = a$ și $m(\angle B) = 60^\circ$. Fie $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ iar E și F mijloacele segmentelor (AB), respectiv (AD).

a) Să se găsească punctul $M \in (CS)$ egal depărtat de punctele A, C, E, F și S.

b) Calculați sinusul unghiului format de planele (EFS) și (EFM).

(Vaslui, 2005)

Poliedre

- Se dă un cub $ABCD A'B'C'D'$. Calculați măsura unghiului planelor
 - $(DC'B')$ și (DBA')
 - $(DC'B')$ și (ABC')
- Fie piramida triunghiulară regulată $SABC$. Prin muchia BC se duce un plan perpendicular pe muchia SA . Știind că lungimea muchiei laterale este de 10 cm, iar lungimea înălțimii este de 8 cm, să se afle :
 - Distanța dintre două muchii opuse
 - Aria triunghiului de secțiune.
- Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AA' \leq \min(AB, BC)$. Fie O centrul dreptunghiului $ABCD$. Să se demonstreze că paralelipipedul este cub dacă și numai dacă $C'O \perp A'C$.
- Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$. Paralela dusă prin O (centrul feței $ADD'A'$) la AC intersectează planul $(BB'C')$ în T . Să se determine sinusul unghiului format de planele (CTO) și $(AB'D')$.
- Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ și M un punct pe semidreapta $(AB$ astfel încât $BM = AB$. Să se arate că triunghiurile AMD' și ACB' au același centru de greutate.
- Se dă un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c . Demonstrați că acest paralelipiped este cub dacă și numai dacă are loc egalitatea:
$$(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 = abc(a + b + c).$$
- Fie $ABCD$ un tetraedru și M, N, P mijloacele muchiilor BC, CD și BD . Dacă $m(\angle DBC) = 90^\circ$, să se arate că $AM^2 + AP^2 = AB^2 + AN^2$.
- Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AD = 1$. Calculați distanța dintre dreptele BD' și DC' .
- Se dă un paralelipiped dreptunghic cu lungimile muchiilor distincte a, b, c , diagonala d și volumul V . Demonstrați că

$$\frac{d^4}{V} \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

- Se dă prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ în care $m(\angle BAC) = 90^\circ$. Să se arate că dreptele BA' și $B'C$ sunt perpendiculare dacă și numai dacă fața $ABB'A'$ este pătrat.
- Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile x, y, z este 2002 cm^3 . Volumul unui alt paralelipiped cu dimensiunile $x + 11, y + 13, z + 14$ este de 8 ori mai mare decât volumul paralelipipedului inițial. Să se determine aria totală a paralelipipedului inițial.
- Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Să se demonstreze că planele (ABC') și (BCA') sunt perpendiculare dacă și numai dacă $AA' = AB \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 36 cm. Dacă $N \in (BD)$ și $P \in (CD)$ astfel încât $BN = 8 \text{ cm}$ și $CP = 15 \text{ cm}$, arătați că $(ANP) \perp (BCD)$.

Probleme recapitulative

1. Catetele de lungimi b și c ale unui triunghi dreptunghic satisfac relația $\sqrt{b^2 - 6b\sqrt{2} + 19} + \sqrt{c^2 - 4c\sqrt{3} + 16} \leq 3$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului.
2. Se dă o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu $AA' = 2AB$ și $d(B'D', BC') = \sqrt{2}$ cm. Aflați aria laterală a prisme.
3. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Să, se demonstreze că planele (ABC') și (BCA') sunt perpendiculare dacă și numai dacă $AA' = AB \frac{\sqrt{6}}{2}$.
4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub și M, N, P mijloacele muchiilor (AA') , (BC) și $(C'D')$. Să se arate că planul (MNP) formează unghiuri congruente cu fiecare față a cubului.
5. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată și E proiecția punctului A pe dreapta VC . Dacă $AB = a$, $\frac{VE}{EC} = k$, $a > 0$, $k > 0$, să se afle:
 - a. Volumul piramidei;
 - b. Cosinusul unghiului diedru dintre planele (VAC) și (VBC) .
6. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu $AC \perp BC$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Diagonalele trapezului determină pe linia mijlocie a trapezului trei segmente congruente având lungimea de câte 4 cm. Fie $AM \perp (ABC)$, $AM = 6$ cm.
 - a. Să se arate că $MO \perp BC$;
 - b. Să se calculeze aria triunghiului MBO .
7. Demonstrați că în orice triunghi ascuțitunghic are loc relația $6 \cdot S_{\Delta ABC} \leq ab + bc + ca$.
8. Dacă $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, să se arate că $(x + 2y)^4 + (y + 2z)^4 + (z + 2x)^4 \geq 3(x + y + z)^4$.
9. Fie $n \in \mathbf{N}$. Comparați cu 0 numărul $a = \sqrt{n + \sqrt{6n - 9}} - \sqrt{n - \sqrt{6n - 9}} - \sqrt{6}$.
10. Să se determine $x \in [1, +\infty)$, $y \in (0, 1]$ știind că $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \geq 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.
11. Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 2\sqrt{abc}$. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{abc}$.
12. Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $abc = 1$. Demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.
13. Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $6x^2 + 6y^2 - 6xy + 1 - 2x + 4y > 0$.