Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a 15.10.2005

Numere reale. Intervale de numere reale.

1. a) Să se determine x $\in$ **Z** astfel încât $\sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbf{Z}$.

   b) Să se determine x $\in$ **N** astfel încât $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \in \mathbf{N}$.
2. Determinaţi numerele naturale n pentru care $\sqrt{30-2\sqrt{n+1}}$ este număr natural.
3. Determinaţi toate numerele de două cifre $\overline{ab}$ astfel încât numărul $\sqrt{2(a+b)+\overline{ab}+\overline{ba}}$ să fie număr natural.
4. Dacă n $\in$ **N***, arătaţi că A $\in$ **N**, unde $A=\sqrt{\underbrace{\overline{444...4}}_{2n\text{ cifre}} - \underbrace{\overline{888...8}}_{n\text{ cifre}}}$.
5. Ştiind că $(|2-a|+b)\sqrt{2}=b|1-\sqrt{2}|+2$, să se determine a, b $\in$ **Q**.
6. Calculaţi $S=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+...+\sqrt{2^{1000}}$.
7. Arătaţi că $\frac{11}{\sqrt{28}}+\frac{17}{\sqrt{70}}+\frac{29}{\sqrt{208}}>6$.
8. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei p: $\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{42}}{13}+...+\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}<\frac{n}{2}$.
9. Fie $a=\sqrt{6-\sqrt{35}}-\sqrt{6+\sqrt{35}}$. Calculati $(a+\sqrt{10})^{2005}$.
10. Se dau numerele reale $A=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ şi $B=\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. Să se arate că $|A+B|=\sqrt{2}$ şi să se calculeze $\max\{A,|B|\}$.
11. Dacă x şi y verifică relaţia $x^2+y^2-4x+2y=20$, atunci x $\in$ [-3; 7] şi y $\in$ [-6; 4].
12. Fie x, y, z $\in$ **R** pentru care $x^2+y^2+z^2-2(x+2y-3z)=2$. Să se afle căror intervale aparţin numerele x, y, z.
13. Arătaţi că numărul real $A=\sqrt{n-\sqrt{2n-1}}+\sqrt{n+\sqrt{2n-1}}$ aparţine intervalului $(\sqrt{4n-3};\sqrt{4n-1})$, oricare ar fi n $\in$ **N***$\setminus\{1\}$.

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana – Şcoala Nicolae Titulescu Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a 05.11.2005

Numere reale. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere.

1. Fie $E = a^2 + b^2 + c^2 - a + 2b - 6c + 8$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.
   a) Să se determine valoarea minimă a lui E.
   b) Arătaţi că dacă $E = 0$, atunci $a \in [-1 ; 2]$, $b \in [-2{,}5 ; 0{,}5]$ şi $c \in [1{,}5 ; 4{,}5]$.

2. a) Arătaţi că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$.
   b) Demonstraţi că pentru orice număr real x are loc inegalitatea:
   $\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2+36} + \sqrt{x^2+49} + \sqrt{x^2+64} \geq (2x+13)\sqrt{2}$.

3. Demonstraţi că dacă $xyz = 1$, atunci $\dfrac{1}{1+x+xy} + \dfrac{1}{1+y+yz} + \dfrac{1}{1+z+zx} = 1$.

4. Fie x, y, z numere întregi distincte două câte două astfel încât $xy + yz + xz = 26$. Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$.

5. a) Descompuneţi în factori expresia $E(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.
   b) Arătaţi că $E(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ şi găsiţi valoarea lui x pentru care $E(x) = 0$.

6. Aflaţi valoarea minimă a expresiei $E(x) = (x + 1)(x - 4)(x^2 - 3x + 8) + 40$, unde $x \in \mathbf{R}$.

7. Determinaţi toate tripletele de numere reale a, b, c care verifică egalitatea
   $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{b^2} + \dfrac{3}{c^2} = 12$.

8. Se dau numerele reale nenule a, b, c. Să se arate că
   $$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

9. a) Demonstraţi că $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}} > \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$, oricare ar fi $k \geq 1$.
   b) Demonstraţi că
   $$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 1,$$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

10. Să se arate că dacă inversul sumei a trei numere este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puţin două dintre numere au acelaşi modul.

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana – Şcoala Nicolae Titulescu Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a 28.01.2006

Probleme date la olimpiadele de matematică - Etapa locală

1. Se dă un cub ABCDA'B'C'D'cu latura de 8 cm. Fie E mijlocul muchiei BB'. Aflaţi:
   a) $m(\widehat{AB', BD})$
   b) sinusul unghiului format de planele (A'BD) şi (BC'D)
   c) d(E, (ACC'))

   (Buzău, 2005)

2. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere raţionale nenule astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, atunci numărul $A=\left(\frac{xy}{z}+1\right)\left(\frac{yz}{x}+1\right)\left(\frac{xz}{y}+1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{A}\in\mathbf{N}$.

   (Bihor, 2005)

3. a) Să se arate că $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x şi y.
   b) Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea:
   $$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

   (Bihor, 2005)

4. a) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstraţi că E(a, b, c) < 0, unde $E(a, b, c) = (c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2$.
   b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x + 1)(3x + 5)(3x + 4)^2 = 4$.

   (Sibiu, 2005)

5. Se consideră numerele reale pozitive x,y, z. Arătaţi că :
   a) dacă $x*y*z = 1$, atunci $(x + y)z^2 + (y + z)x^2 + (z + x)y^2 \geq 6$.
   b) dacă x + y + z = 1, atunci $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\leq\frac{1}{4}$.

   (Sibiu, 2005)

6. Se dă un triunghi ABC cu $m(\angle A) = 90°$, AB = 3 cm şi AC = 4 cm. Fie S un punct din spaţiu, $S \notin (ABC)$, astfel încât planele (SAB), (SBC) şi (SAC) formează cu planul (ABC) unghiuri congruente de măsură 60°. Să se calculeze :
   a) distanţa de la punctul S la planul (ABC)
   b) ariile triunghiurilor SAB, SBC şi SAC.

   (Bihor, 2005)

7. Se dă un romb ABCD cu AB = a şi $m(\angle B) = 60°$. Fie $SA \perp (ABC)$, SA = a iar E şi F mijloacele segmentelor (AB), respectiv (AD).
   a) Să se găsească punctul $M \in (CS)$ egal depărtat de punctele A, C, E, F şi S.
   b) Calculaţi sinusul unghiului format de planele (EFS) şi (EFM).

   (Vaslui, 2005)

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana – Şcoala Nicolae Titulescu Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a 18.03.2006

Poliedre

1. Se dă un cub ABCDA'B'C'D'. Calculaţi măsura unghiului planelor
   a) (DC'B') şi (DBA')
   b) (DC'B') şi (ABC')
2. Fie piramida triunghiulară regulată SABC. Prin muchia BC se duce un plan perpendicular pe muchia SA. Ştiind că lungimea muchiei laterale este de 10 cm, iar lungimea înălţimii este de 8 cm, să se afle :
   a) Distanţa dintre două muchii opuse
   b) Aria triunghiului de secţiune.
3. Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AA' $\leq$ min(AB, BC). Fie O centrul dreptunghiului ABCD. Să se demonstreze că paralelipipedul este cub dacă şi numai dacă C'O $\perp$ A'C.
4. Fie cubul ABCDA'B'C'D'. Paralela dusă prin O (centrul feţei ADD'A') la AC intersectează planul (BB'C') în T. Să se determine sinusul unghiului format de planele (CTO) şi (AB'D').
5. Fie cubul ABCDA'B'C'D' şi M un punct pe semidreapta (AB astfel încât BM = AB. Să se arate că triunghiurile AMD' şi ACB' au acelaşi centru de greutate.
6. Se dă un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c. Demonstraţi că acest paralelipiped este cub dacă şi numai dacă are loc egalitatea:
   $$(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 = abc(a + b + c).$$
7. Fie ABCD un tetraedru şi M, N, P mijloacele muchiilor BC, CD şi BD. Dacă m($\angle$DBC) = 90°, să se arate că $AM^2 + AP^2 = AB^2 + AN^2$.
8. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu AD = 1. Calculaţi distanţa dintre dreptele BD' şi DC'.
9. Se dă un paralelipiped dreptunghic cu lungimile muchiilor distincte a, b, c, diagonala d şi volumul V. Demonstraţi că
   $$\frac{d^4}{V} \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2.$$
10. Se dă prisma triunghiulară dreaptă ABCA'B'C' în care m($\angle$BAC) = 90°. Să se arate că dreptele BA' şi B'C sunt perpendiculare dacă şi numai dacă faţa ABB'A' este pătrat.
11. Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile x, y, z este 2002 cm^3. Volumul unui alt paralelipiped cu dimensiunile x + 11, y + 13, z + 14 este de 8 ori mai mare decât volumul paralelipipedului iniţial. Să se determine aria totală a paralelipipedului iniţial.
12. Se consideră prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C'. Să se demonstreze că planele (ABC') şi (BCA') sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $AA' = AB\frac{\sqrt{6}}{2}$.
13. Fie ABCD un tetraedru regulat cu muchia de 36 cm. Dacă N $\in$ (BD) şi P $\in$ (CD) astfel încât BN = 8 cm şi CP = 15 cm, arătaţi că (ANP) $\perp$ (BCD).

Probleme din Gazeta Matematică selectate de prof. Olaru Adriana -Şc. N. Titulescu Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a 29.04.2006

Probleme recapitulative

1. Catetele de lungimi b şi c ale unui triunghi dreptunghic satisfac relaţia $\sqrt{b^2-6b\sqrt{2}+19}+\sqrt{c^2-4c\sqrt{3}+16}\le 3$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului.

2. Se dă o prismă patrulateră regulată ABCDA'B'C'D' cu AA' = 2AB şi $d(B'D', BC')=\sqrt{2}$ cm. Aflaţi aria laterală a prismei.

3. Se consideră prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C'. Să, se demonstreze că planele (ABC') şi (BCA') sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $AA'=AB\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Fie ABCDA'B'C'D' un cub şi M, N, P mijloacele muchiilor (AA'), (BC) şi (C'D'). Să se arate că planul (MNP) formează unghiuri congruente cu fiecare faţă a cubului.

5. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată şi E proiecţia punctului A pe dreapta VC. Dacă AB = a, $\frac{VE}{EC}=k$, a > 0, k > 0, să se afle:
   a. Volumul piramidei;
   b. Cosinusul unghiului diedru dintre planele (VAC) şi (VBC).

6. Se dă un trapez isoscel ABCD cu $AC \perp BC$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Diagonalele trapezului determină pe linia mijlocie a trapezului trei segmente congruente având lungimea de câte 4 cm. Fie $AM \perp (ABC)$, AM = 6 cm.
   a. Să se arate că $MO \perp BC$;
   b. Să se calculeze aria triunghiului MBO.

7. Demonstraţi că în orice triunghi ascuţitunghic are loc relaţia $6\cdot S_{\Delta ABC}\le ab+bc+ca$.

8. Dacă x > 0, y > 0, z > 0, să se arate că $(x+2y)^4+(y+2z)^4+(z+2x)^4\ge 3(x+y+z)^4$.

9. Fie $n \in \mathbf{N}$. Comparaţi cu 0 numărul $a=\sqrt{n+\sqrt{6n-9}}-\sqrt{n-\sqrt{6n-9}}-\sqrt{6}$.

10. Să se determine $x\in[1,+\infty)$, $y\in(0,1]$ ştiind că $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\ge 2\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

11. Fie $a,b,c\in[0,+\infty)$ astfel încât $a+b+c=2\sqrt{abc}$. Să se arate că $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{abc}$.

12. Fie $a,b,c\in(0,+\infty)$ astfel încât $abc=1$. Demonstraţi că $a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

13. Demonstraţi că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $6x^2+6y^2-6xy+1-2x+4y>0$.

Probleme din Gazeta Matematică selectate de prof. Olaru Adriana -Şc. N. Titulescu Călăraşi