

Patrulater. Coliniaritate. Concurență

1. Demonstrați că medianele unui triunghi oarecare sunt concurente într-un punct G (centru de greutate) situat pe fiecare mediană la o treime de bază și două treimi de vârf.
2. Fie ABCD un paralelogram cu M, N, P și Q mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] respectiv [AD]. Dacă $BQ \cap DM = \{R\}$ și $BP \cap DN = \{S\}$, arătați că:
 - a) RBSD este paralelogram
 - b) A, R, S, C sunt coliniare
 - c) $[AR] \equiv [RS] \equiv [SC]$
 - d) MP, BD, RS sunt concurente.
3. Fie ABCD un paralelogram ($AB > BC$), $M \in (AB)$, $N \in (DC)$, astfel încât $MB = DN = BC$, $BR \perp MC$, $DP \perp AN$, $R \in (MC)$, $P \in (AN)$. Arătați că:
 - a) Mijloacele laturilor (BC) și (AD) și punctele P și R sunt coliniare;
 - b) MN, PR și BD sunt drepte concurente
4. Fie ABCD un patrulater convex cu M și N mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă DM și DN intersectează diagonala [AC] în R, respectiv S astfel încât $[AR] \equiv [RS] \equiv [SC]$, demonstrați că ABCD este paralelogram.
5. Fie ABCD un patrulater convex, O punctul de intersecție a diagonalelor iar M și N mijloacele laturilor [DC], respectiv [BC]. Să se arate ca O este centrul de greutate al triunghiului AMN dacă și numai dacă ABCD este paralelogram.
6. În triunghiul ABC se știe că : $m(\angle A)=90^0$, $AM \perp BC$, $M \in BC$, iar N un punct pe (AM). Paralela prin N la AB intersectează dreapta BC în P. Perpendiculara în N pe NC intersectează dreapta AB în Q. Demonstrați că [AN] și [PQ] au același mijloc.
7. Se dau două triunghiuri dreptunghice isoscele ABC și ADE cu $m(\angle BAC) = m(\angle DAE)$ care nu au puncte interioare comune. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor [BC], [CD], [DE] și [BE]. Arătați că:
 - a) $2MP \leq BC + DE$
 - b) MNPQ este pătrat sau paralelogram
8. Fie O un punct în planul triunghiului ABC și A', B', C' simetricele punctului O față de mijloacele laturilor [BC], [AC] și [AB]. Să se demonstreze că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.
9. În triunghiul ABC cu $m(\angle BAC) = 3m(\angle ABC)$, mediatoarea laturii [AB] intersectează latura [BC] în punctul E, iar bisectoarea unghiului $\angle ACB$ în punctul M. Știind că patrulaterul AEBM este romb, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.
10. Se dă pătratul ABCD și M un punct pe mediatoarea laturii [AB] astfel încât $\angle CMB \equiv \angle MCB$: Arătați că triunghiul $\triangle MAB$ este echilateral.

Probleme de concurs

1. Dacă $m, n \in \mathbf{Z}^*$, să se demonstreze că mulțimea $A = \left\{ \frac{m+n}{3}, \frac{m-n}{3}, \frac{m}{3}, \frac{n}{3} \right\}$ are cel puțin un element în \mathbf{Z} .
2. Dacă $\frac{a+b}{c+d} + \frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c-d} + \frac{a-b}{c+d}$, calculați produsul $abcd$.
3.
 - a) Verificați dacă $\frac{1}{1 \cdot 7} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{7} \right)$
 - b) Comparați numerele a și b
$$a = \left(\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{115 \cdot 121} \right)$$

$$b = \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{6}{8} + \frac{7}{12} + \dots + \frac{505}{2004} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{501} \right) \right] : 5^3$$
4. Arătați că $\frac{101}{102} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{101^2} < \frac{201}{102}$
5. Fie ABCD patrulater convex cu E mijlocul lui [AB] și F mijlocul lui [BC], M mijlocul lui [DE], N mijlocul lui [DF], P mijlocul lui [CE], Q mijlocul lui [AF]. Să se demonstreze că MNPQ este paralelogram.
6. Arătați că picioarele a două înălțimi ale unui triunghi și mijlocul celei de-a treia laturi sunt vârfurile unui triunghi isoscel. Cercetați dacă acest triunghi poate fi echilateral și în ce condiții.

ASEMĂNARE

1. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$. O dreaptă perpendiculară pe BC intersectează (BC) , (CA) și AB în D , E , F . Dacă M este mijlocul segmentului (BC) , demonstrați că:
 - a) $AE = AF$
 - b) $AE \cdot BC = 2AB \cdot DM$
2. Bisectoarele unghiurilor A și D ale paralelogramului $ABCD$ intersectează diagonalele (BD) și (AC) în M , respectiv N . Demonstrați că $MN \parallel AD$.
3. În triunghiul isoscel ABC , $AB = AC = b$ și $BC = a$. Fie (BE) bisectoarea unghiului $\angle ABC$, $E \in (AC)$ și $EF \parallel BC$, $F \in (AB)$. Calculați lungimea segmentului $[EF]$.
4. O secantă intersectează laturile unui unghi XOY de măsură 120° în punctele A și B , iar bisectoarea acestui unghi în punctul C . Demonstrați că $\frac{1}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$.
5. În triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, fie D mijlocul segmentului $[BC]$, E simetricul lui D față de AC și F proiecția lui B pe $[AC]$. Dreapta EF intersectează latura $[AB]$ în G . Demonstrați că triunghiurile ABC și BGD sunt asemenea.
6. Se dă un triunghi ABC cu $m(\angle BAC) = 90^\circ$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează AD în E , iar bisectoarea unghiului $\angle DAC$ intersectează (DC) în F . Să se arate că $AC = 3EF \Leftrightarrow m(\angle ABC) = 60^\circ$.
7. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se iau punctele M și N astfel încât $BM = CN$. Să se arate că $PQ \parallel AD$, unde P și Q sunt mijloacele segmentelor (MN) , respectiv (BC) , iar (AD) este bisectoarea unghiului $\angle BAC$, $D \in (BC)$.
8. Paralela la bazele unui trapez dusă prin punctul de intersecție al diagonalelor intersectează laturile neoparalele în M și P . Să se calculeze lungimea segmentului MP în funcție de bazele trapezului.
9. Fie O un punct interior triunghiului ABC . Paralela prin O la BC intersectează pe AB în S și pe AC în P , paralela prin O la AC intersectează pe BC în N și pe AB în R , paralela prin O la AB intersectează pe AC în Q și pe BC în M .
Demonstrați că:
 - a) $\frac{MN}{BC} + \frac{PQ}{AC} + \frac{RS}{AB} = 1$
 - b) Dacă $\frac{MN}{BC} = \frac{PQ}{AC} = \frac{RS}{AB}$, atunci O este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Inegalități

- Demonstrați că $\frac{1}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{1}{a^2 + c^2 + ac} + \frac{1}{b^2 + c^2 + bc} \leq \frac{1}{abc}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}^*$, $a + b + c = 1$.
- Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{2005} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2003}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2002 \cdot 2004} < \frac{1}{\sqrt{2005}}$.
- Demonstrați că $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{77^2} < 0,25$.
- Să se demonstreze că $|a| + 2|b| + 3|c| - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \leq 7$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$.
- Se dau numerele

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \dots + \frac{2n-1}{2n+1}, \quad c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n},$$

$$d_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}, \text{ unde } n \in \mathbf{N}^*.$$

Arătați că: a) $\frac{a_n}{b_n} > 1$ b) $\frac{c_n}{d_n} < 1$ c) $c_n^2 < \frac{1}{2n+1}$ d) $d_n^2 > \frac{1}{2n+1}$
- Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.
- Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, are loc inegalitatea $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} > \frac{2n}{n+1}$.
- Demonstrați că $1000^{1000} > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 1001 \cdot \dots \cdot 1997 \cdot 1999$.
- Dacă $a, b, c > 0$ și $a + b + c = 1$, atunci $\sqrt{a+2b+3c} + \sqrt{3a+b+2c} + \sqrt{2a+3b+c} \leq 3\sqrt{2}$.
- Să se arate că în orice paralelogram ABCD cu $AB \geq AD$ are loc inegalitatea

$$AD^2 \leq \frac{AC^2 + BD^2}{4} \leq AB^2.$$
- Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc inegalitatea

$$\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq a(\cos \hat{B} + \cos \hat{C}) + b(\cos \hat{A} + \cos \hat{C}) + c(\cos \hat{B} + \cos \hat{A}) \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}.$$
- Se consideră triunghiul de laturi $a \geq b \geq c$ și se notează cu m_c lungimea medianei corespunzătoare laturii c . Să se arate că $ab + bc + ca \leq 4m_c^2 + 2(a^2 - c^2)$.

Probleme recapitulative

- În triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ fie $E \in (BC)$ astfel încât $\frac{CE}{BC} = \frac{2}{3}$. Paralela prin E la AB intersectează pe (AC) în D , iar perpendiculara în E pe BC intersectează pe (AB) în F . Să se arate că:
 - $\triangle DEC$ este isoscel
 - $\triangle AFD$ este isoscel.
- Se dă un triunghi isoscel ABC cu $m(\angle A) = 120^\circ$. Fie M mijlocul laturii $[AB]$. Perpendiculara din M pe BC intersectează dreapta AC în D , iar bisectoarea unghiului $\angle CDM$ intersectează latura $[BC]$ în E . Să se arate că:
 - $CD = 3 AD$
 - $BD \perp DC$
 - $[EB] \equiv [EC]$
 - $EM \parallel AC$.
- Fie $[BM]$ și $[CP]$ mediane în triunghiul ABC iar D și E puncte pe semidreptele (BM) , respectiv (CP) astfel încât $BM = MD$ și $CP = PE$.
 - Să se arate că $\triangle APE \equiv \triangle BPC$ și $\triangle AMD \equiv \triangle CMB$
 - Să se arate că punctele A, D, E sunt coliniare.
- Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului echilateral ABC se consideră punctele M , respectiv N astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Calculați măsura unghiului $\angle BOC$, unde $\{O\} = BN \cap MC$.
- În exteriorul triunghiului oarecare ABC cu $m(\angle A) \neq 90^\circ$ se consideră triunghiurile dreptunghice isoscele ABN și ACM de ipotenuze $[BN]$, respectiv $[CM]$. Să se arate că:
 - $\triangle ANC \equiv \triangle ABM$
 - $BM \perp NC$.
- În triunghiul ABC se prelungește înălțimea $[BD]$ dincolo de B cu $BB' = AC$, apoi înălțimea $[CE]$ dincolo de C cu $CC' = AB$. Să se arate că:
 - $\triangle ABB' \equiv \triangle ACC'$
 - $AB' \perp AC'$
- În triunghiul ABC , fie $F \in (BC)$. Paralela prin B la AF intersectează pe AC în E . Să se arate că $[AB] \equiv [AE]$ dacă și numai dacă $[AF]$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.