Centrul de Excelenţă 06.10.2007
Clasa a VI –a

Divizibilitate

1. Calculaţi suma numerelor naturale de trei cifre divizibile cu 5, care nu sunt divizibile cu 2.

2. Fie $N = 1 + 2007 + 2007^2 + 2007^3 + ... + 2007^{2007}$. Arătaţi că:
   a) $N \vdots 2008$
   b) $N:2008$ este par

3. Stabiliţi dacă numărul $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 2007$ este prim sau compus.

4. Determinaţi numerele prime care verifică egalitatea $2a + 3b + 4c = 32$.

5. Să se determine numerele naturale de forma $\overline{ab}$, ştiind că numerele de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ şi $\overline{baa}$ sunt simultan prime.

6. Fie x şi y numere naturale. Arătaţi că:
   a) Dacă $(3x+5y) \vdots 13$, atunci $(33x+55y) \vdots 13$
   b) Dacă $(3x+5y) \vdots 13$ atunci $(16x+18y) \vdots 13$
   c) $(3x+5y) \vdots 13$ dacă şi numai dacă $(7x+3y) \vdots 13$

7. Arătaţi că numărul $N = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2003} + 2^{2004}$ este divizibil cu 15.

8. Fie numărul
   $N = 1007 + 1008 + 1009 + \ldots + 2004 + 2005 - 8 - 9 - 10 - \ldots - 1005 - 1006$.
   a) Arătaţi că N este pătrat perfect
   b) Arătaţi că N este divizibil cu $111^2$.

9. Se consideră numărul $a = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2005} + 5^{2006}$. Arătaţi că numărul $b = 4 {}^{*} 5^{2007} + 4a + 1$ este pătrat perfect.

10. Aflaţi pătratele perfecte de forma $\overline{aabb}$.

11. Determinaţi toate numerele de trei cifre care au exact 3 divizori.

12. Există numere naturale p prime astfel încât $n = p^{2007} + 7$ să fie prim? (justificaţi răspunsul)

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală "Nicolae Titulescu" Călăraşi

Centrul de Excelenţă 27.10.2007

Clasa a VI –a

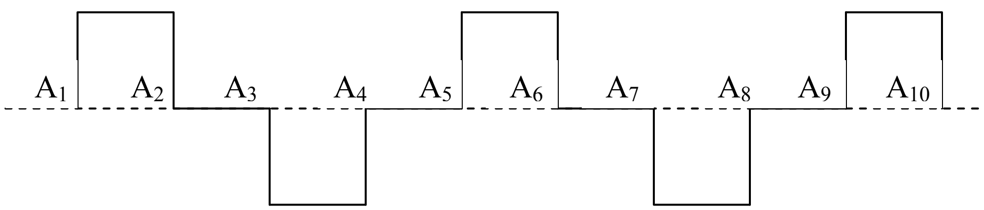
Segmente

1. Pe o dreaptă se consideră punctele A, M, N, C, P, Q, B în această ordine astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC]$ , $[CP] \equiv [PQ] \equiv [QB]$ şi AB = 12 cm.
   a) Să se calculeze lungimile segmentelor [MQ] şi [NP];
   b) Ce lungime ar trebui să aibă segmentul [AC] pentru ca P să fie mijlocul segmentului [AB]?

2. Se dau trei puncte coliniare A, B, C în această ordine. Fie M mijlocul segmentului [AB] şi N mijlocul segmentului [BC]. Să se arate că :
   a) AC = 2MN;
   b) Dacă segmentele [MN] şi [AC] au acelaşi mijloc, atunci $[AB] \equiv [BC]$.

3. Fie punctele coliniare $A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}$ astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, $A_3A_4 = 3$ cm,..., $A_{99}A_{100} = 99$ cm. Calculaţi lungimile segmentelor $[A_1A_{100}]$, $[A_{10}A_{50}]$, $[A_{40}A_{60}]$ şi [MP], unde M este mijlocul segmentului $[A_{10}A_{50}]$ iar P este mijlocul segmentului $[A_{40}A_{60}]$.

4. Pe o dreaptă sunt 2007 puncte $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{2007}$ astfel încât distanţa între fiecare două puncte consecutive este de 1 cm. Pe segmentul $[A_1 A_2]$ (sus) se construieşte un pătrat cu laturile de 1 cm. Pe segmentul $[A_3 A_4]$ (jos) avem un alt pătrat cu laturile de 1 cm, pe segmentul $[A_5 A_6]$ (sus) alt pătrat cu laturile de 1 cm şi aşa mai departe.
   Construcţiile se repetă ca în figura de mai jos:




   Aflaţi lungimea liniei frânte care începe în $A_1$ şi se termină în $A_{2007}$.

5. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât AB + AD = 2AC şi $BD = 2^{2007}$ cm. Să se afle lungimea segmentului [BC].

6. Se consideră punctele coliniare A, B, C astfel încât AB = 9 cm şi AC = 5 cm. Fie M mijlocul segmentului [AC]. Determinaţi lungimea segmentului [NB] ştiind că punctul N aparţine dreptei AB şi MN = 4 cm.

7. a) Construiţi figura geometrică ce îndeplineşte simultan următoarele condiţii :
      i) Punctele A, B, C, D sunt coliniare;
      ii) Segmentele [AD] şi [BC] au acelaşi mijloc, notat cu M;
      iii) Punctul A nu se află între B şi D;
      iv) MC = 3MA.
   b) Dacă P este mijlocul segmentului [AC] iar Q este mijlocul segmentului [BD], arătaţi că 3PQ = 2BC.

8. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C, D în această ordine astfel încât BC = 3AB şi CD = 2BC. Dacă punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor [AC], respectiv [AD] şi MN = 15 cm, să se calculeze lungimile segmentelor [AB], [BC], [CD].

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală “Nicolae Titulescu” Călăraşi

Centrul de Excelenţă 12.01.2008
Clasa a VI –a

Probleme de olimpiadă

1. Determinaţi toate perechile de numere naturale prime astfel ca împărţind unul din ele la celălalt să obţinem restul egal cu câtul.
2. Demonstraţi inegalitatea $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{2008^2}<\frac{2007}{2008}$.
3. Dacă $\frac{1}{x+2007}+\frac{1}{y+2007}+\frac{1}{z+2007}=\frac{3}{2008}$ , arătaţi că $\frac{x}{x+2007}+\frac{y}{y+2007}+\frac{z}{z+2007}=\frac{3}{2008}$ .
4. Fie $a_1, a_2, a_3,...,a_{2008} \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{2+a_2}+\frac{3}{3+a_3}+...+\frac{2008}{2008+a_{2008}}=1004$. Arătaţi că

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{2+a_2}+\frac{a_3}{3+a_3}+...+\frac{a_{2008}}{2008+a_{2008}}=1004$$

5. Fie $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$ , $b=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2n}$ , $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că

$N=27^{n+1}\cdot\left(\frac{a}{2}-b+\frac{5}{2}\right)^n$ este număr natural şi determinaţi ultima cifră a sa.

6. Fie numerele raţionale pozitive $A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$ şi

   $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2007}{2008}$. Calculaţi $B-A$, $A^B$, $(B-2002)^{A+1}$.

7. Se consideră numerele $a=2^{n+12}:\left(2^3\right)^4+3^{2n}:9^n$, $b=\frac{49\cdot 14^n+22^n\cdot 11}{11^{n+1}+7^{n+2}}$,

   $c=2^{n+3}-2^{n+2}-2^{n+1}-2^n-2^0$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.
   a) Calculaţi numerele
   b) Stabiliţi dacă $A=\frac{1}{ab}+\frac{2}{bc}-\frac{3}{ac}$ este fracţie zecimală finită, periodică simplă sau periodică mixtă.
8. Se consideră trei puncte coliniare distincte A, B, C astfel încât B să fie situat între A şi C.Fie M mijlocul segmentului [AB] şi N mijlocul segmentului [BC]. Să se arate că:
   a) AC = 2MN
   b) Dacă segmentele [MN] şi [AC] au acelaşi mijloc, atunci AB = BC.
9. Se dau punctele coliniare A, B, C, D astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$, BC = 3AB şi CD = 2BC. Fie M şi N mijloacele segmentelor [AC], respectiv [AD], iar MN = 15 cm. Aflaţi lungimile segmentelor [AB], [BC] şi [CD].
10. Fie ∠AOB, ∠BOC, ∠COD şi ∠DOA unghiuri formate în jurul punctului O. Bisectoarea unghiului ∠BOC şi semidreapta [OD sunt semidrepte opuse. Dacă [OD ⊥ [OA şi m(∠AOB) = 45°, să se arate că:
    a) OC ⊥ OB
    b) bisectoarele unghiurilor AOB şi COD sunt semidrepte opuse.
    Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală “Nicolae Titulescu” Călăraşi

Centrul de Excelenţă 29.03.2008
Clasa a VI –a

Probleme de concurs

1. Fie unghiul $\angle XOY$ şi $A, B \in [OX$, $C, D \in [OY$ astfel încât $[OA] \equiv [OC]$, $[OB] \equiv [OD]$, $AD \cap BC = \{P\}$. Fie M şi N mijloacele segmentelor [AC], respectiv [BD]. Să se arate că:
   a) $\Delta OBC \equiv \Delta ODA$
   b) $\Delta APB \equiv \Delta CPD$
   c) Punctele O, M, P, N sunt coliniare.

2. În $\Delta ABC$ în care $AB < AC$, [AD este bisectoarea unghiului A ($D \in BC$). Perpendiculara în A pe AD intersectează dreapta BC în M. Fie $P \in AM$ astfel încât $AM = AP$. Să se arate că:
   a) $\Delta AMD \equiv \Delta APD$
   b) $AD \perp BE$, unde $\{E\} = AC \cap PD$.

3. Într-o urnă sunt r bile roşii, g bile galbene şi a bile albastre. Se extrage o bilă şi se notează cu $p_1$, $p_2$, $p_3$ probabilitatea ca bila extrasă să nu fie roşie, să nu fie galbenă, respectiv să nu fie albastră. Se ştie că $p_1$ este 80% din $p_2$ şi $p_2$ este 62,5% din $p_3$.
   a) Arătaţi că $p_1 + p_2 + p_3 = 2$
   b) Arătaţi că $r = g + 2a$.

4. Aflaţi 100 numere raţionale pozitive invers proporţionale cu 2, 6, 12, …, $100 \cdot 101$, ştiind că suma lor este 20% din suma primelor 100 numere naturale nenule.

5. Fie proporţiile $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ şi $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, unde x, y, z sunt numere raţionale pozitive. Determinaţi numerele x, y şi z ştiind că $x^2 + y^2 + z^2 = 433$.

6. Două dintre unghiurile unui triunghi au măsurile direct proporţionale cu numerele 2 şi 3, iar alte două unghiuri ale triunghiului au măsurile invers proporţionale cu numerele 5 şi 6. Aflaţi valorile naturale ale măsurilor unghiurilor triunghiului.

7. Dacă elevii unei şcoli sunt grupaţi câte 2, 3, 4, 5, 6 rămâne de fiecare dată un elev negrupat. Dacă se grupează câte 7, nu rămâne nici un elev. Arătaţi că în şcoală sunt cel puţin 26 de elevi care îşi serbează ziua de naştere în aceeaşi lună.

8. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z ştiind că $\frac{x}{2(y+z)} = \frac{y}{5(z+x)} = \frac{z}{10(x+y)} = \frac{3}{5(x+y+z)}$.

9. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2006}$, 2006 şi 2008 este 2007. Calculaţi media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2006}$.

10. Dacă $\frac{x}{y} + \frac{x}{z} = 1{,}1$ şi $\frac{y}{z} = \frac{5}{2}$, aflaţi $\frac{x}{y}$ şi $\frac{x}{z}$ .

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală “Nicolae Titulescu” Călăraşi