Centrul de Excelenţă
Clasa a V –a   28.10.2006

Numere naturale

1. Să se afle 5 numere impare consecutive ştiind că dacă la triplul sumei lor se adaugă 11 unităţi, se obţine 2006.

2. Suma a 45 de numere naturale impare este 2001. Demonstraţi că cel puţin două dintre acestea sunt egale.

3. Reconstituiţi adunarea $\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}=\overline{abbc}$.

4. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{abc}=7\cdot\left(\overline{ac}+b\right)+3c$.

5. Determinaţi numărul $\overline{abcde}$ ştiind că $3\overline{abcde}+\overline{abcde6}\ =435801$.

6. O persoană urcă un şir de trepte ale unei scări după regula : urcă 3 trepte, coboară 2 trepte, urcă din nou 5 trepte şi coboară o treaptă.
    a) După 736 paşi, pe ce treaptă se află persoana ?
    b) După câţi paşi persoana ajunge pe treapta 736 ?
   (Se presupune că prin efectuarea unui pas, persoana urcă sau coboară o treaptă.)

7. La o librărie s-au adus caiete pentru vânzare la un anumit număr de elevi. Dacă fiecare elev cumpără câte 6 caiete, atunci nu ajung caiete pentru 10 elevi. Dacă fiecare elev cumpără câte 5 caiete, atunci rămân nevândute 10 caiete. Aflaţi numărul de elevi şi numărul de caiete aduse.

8. La împărţirea a două numere naturale se obţine câtul 31 şi restul 17. Suma dintre deîmpărţit şi împărţitor este 2065. Aflaţi numerele.

9. Împărţind numărul natural a la numărul natural b obţinem câtul c şi restul c. Determinaţi câtul şi restul împărţirii lui a la $(b + 1)$.

10. Să se determine câtul şi restul împărţirii numărului 15! + 2000 la 182, unde $n\,! = 1*2*3*\ldots*n$.

11. Împărţind numărul natural n la 72 obţinem restul 64. Ce rest obţinem dacă împărţim pe n la 18 ?

12. Într-o împărţire de două numere naturale câtul este 33 şi restul 11. Ştiind că suma dintre deîmpărţit şi împărţitor este 555, să se afle cele două numere.

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală nr. 5 "Nicolae Titulescu" Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a V –a 25.11.2006

Divizibilitate. Puteri

1. Să se arate că numărul $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

2. Calculaţi :
   a) $S_1 = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2005} + 5^{2006}$
   b) $S_2 = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2004} + 2^{2006}$

3. Calculaţi suma numerelor naturale de trei cifre divizibile cu 5, care nu sunt divizibile cu 2.

4. Arătaţi că numărul $N = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2003} + 2^{2004}$ este divizibil cu 15.

5. Determinaţi numărul natural n pentru care numărul $N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ este divizibil cu 5.

6. Se consideră numărul $a = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2005} + 7^{2006}$. Arătaţi că numărul $b = 6 \cdot 7^{2007} + 6a + 1$ este pătrat perfect.

7. Fie numărul
   $N = 1007 + 1008 + 1009 + \ldots + 2004 + 2005 - 8 - 9 - 10 - \ldots - 1005 - 1006$.
   a) Arătaţi că N este pătrat perfect
   b) Arătaţi că N este divizibil cu 111^2.

8. Arătaţi că numărul $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{2005} + 3^{2006}$ nu este pătrat perfect.

9. Arătaţi că numărul
   $A = 2000^{2000} + 2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005}$ nu este pătrat perfect.

10. Fie numerele $A = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + \ldots + 10 \cdot 3^{2005} + 100$ şi
    $B = (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2005}) \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2005} + 10)$
    a) Arătaţi că A + B este pătrat perfect
    b) Arătaţi că $A < 3^{2008}$.

11. Arătaţi că $321^{123} < 123^{321}$.

12. Se dau numerele $x = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2003 \cdot 2004 + 2005 \cdot 2006$ şi $y = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 2003^2 + 2005^2$. Să se determine numărul natural n pentru care $n^2 = x - y$.

13. Fie numerele $a = 2^{2008} + 2 + 2^{4013}$ şi $b = 2^{2006} + 1$. Arătaţi că a este divizibil cu b^2.

14. Calculaţi $10^{2006} - 9 \cdot 10^{2005} - 9 \cdot 10^{2004} - 9 \cdot 10^{2003} - \ldots - 9 \cdot 10^2 - 9 \cdot 10 - 9$.

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală nr. 5 “Nicolae Titulescu” Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a V –a 27.01.2007

Probleme de olimpiadă

1. În vacanţa de iarnă s-a organizat o excursie la care au participat 814 elevi. Transportul a fost asigurat cu mai multe tipuri de autocare care aveau 20, 36, 42 şi 48 de locuri. Numărul autocarelor cu 36 de locuri este dublu faţă de numărul celor cu 42 de locuri. Alegerea autocarelor a fost făcută astfel încât încât în nicio maşină să nu rămână locuri libere, să fie folosite toate cele 4 tipuri de autocare şi numărul total al acestora să fie cât mai mic posibil. Stabiliţi câte autocare din fiecare fel au fost folosite pentru transportul elevilor.

2. Pentru $n \in \mathbf{N}$, n număr impar, se consideră numerele:
$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n,\quad S_2 = n - (n-1) + \ldots + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$$
a) Să se determine $n \in \mathbf{N}$, ştiind că $S_1 = 2006 \cdot S_2$
b) Să se arate că $2 \cdot (S_1 + S_2)$ este pătrat perfect.

3. Se consideră un număr natural de 5 cifre distincte care are prima cifră 1. Se ia prima cifră a numărului şi se mută la sfârşitul numărului considerat. Astfel, se obţine un umăr natural de 3 ori mai mare decât primul. Aflaţi numărul iniţial.

4. a) Determinaţi numărul $\overline{abc}$ astfel încât $2^0 \cdot a^3 + 2^1 \cdot b^3 + 2^2 \cdot c^3 = 66$
b) Determinaţi numărul $\overline{abc}$ astfel încât $6a + 7b + 8c = 678 - 9a^3$.

5. Prin împărţirea numerelor naturale $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, scrise în baza 10, la acelaşi număr natural, se obţin câturile b, c, respectiv a, şi resturile c, a, respectiv b. Aflaţi împărţitorul şi arătaţi că numărul $\overline{abc}$ este divizibil cu 111.

6. Calculaţi:
a) $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \ldots + 2002 + 2003 - 2004 + 2005 + 2006$
b) $a + 4b + 3c$, ştiind că $a + b = 100$ şi $b + c = 200$.

7. La un concurs de matematică, din 40 de elevi, 25 au rezolvat prima problemă, 30 a doua problemă, 35 a treia problemă, iar 33 a patra problemă. Arătaţi că cel puţin 3 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme.

8. a) Diferenţa a două numere naturale este 2006. Dacă se dublează unul dintre numere, atunci diferenţa devine 1003. Aflaţi numerele.
b) Produsul a două numere naturale este 420. Dacă se măreşte unul dintre numere cu 3, atunci produsul devine 483. Aflaţi numerele.

9. a) Calculaţi suma $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2007 - 2 - 4 - 6 - 8 - \ldots - 2006$
b) Rezolvaţi ecuaţia $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 120$, $x \in \mathbf{N}$.

10. La un concurs de matematică au participat 10 elevi care au obţinut punctaje diferite între ei şi au fost premiaţi toţi. Fiecare este premiat cât următorii doi din clasament. Dacă al patrulea a primit 50 lei, iar al şaselea a primit 19 lei, cât au primit :
a) primul clasat ?
b) toţi concurenţii ?

11. La un test cu 30 de întrebări, pentru fiecare răspuns corect se acordă 10 puncte, pentru fiecare răspuns greşit se scad 5 puncte, iar pentru o întrebare la care nu s-a răspuns se acordă 0 puncte. Un elev a obţinut 250 de puncte. Câte răspunsuri corecte a dat elevul ?

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală "Nicolae Titulescu" Călăraşi

Centrul de Excelenţă
Clasa a V –a 21.04.2007

Numere raţionale - aplicaţii

1. Comparaţi numerele
$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{2006\cdot 2007}+\frac{1}{2007\cdot 2008} \quad \text{şi}$$
$$B=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+.....+\frac{1}{2002\cdot 2005}+\frac{1}{2005\cdot 2008}$$

2. Calculaţi $S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+.....+\frac{1}{2003\cdot 2005}+\frac{1}{2005\cdot 2007}$

3. Arătaţi că $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+.....+\frac{1}{2003\cdot 2005}+\frac{1}{2005\cdot 2007}<\frac{1}{2}$

4. Calculaţi media aritmetică a numerelor
$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2007}$ şi $B=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+.....+\frac{2006}{2007}$.

5. Arătaţi că dacă trei numere naturale au proprietatea că fiecare din ele este media aritmetică a celorlalte două, atunci cele trei numere sunt egale.

6. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2000}$ este 2007, iar media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2000}, a_{2001}, a_{2002}, a_{2003}, a_{2004}, a_{2005}, a_{2006}, a_{2007}$ este tot 2007. Calculaţi media aritmetică a numerelor $a_{2001}, a_{2002}, a_{2003}, a_{2004}, a_{2005}, a_{2006}, a_{2007}$.

7. Se dă un număr de trei cifre la care cifra zecilor este media aritmetică a celorlalte două cifre. Arătaţi că suma dintre acest număr şi numărul format de cifra unităţilor este divizibil cu 7.

8. Patru elevi împart 1000 timbre astfel : primul ia $\frac{1}{2}$ din ce ia al doilea, al doilea ia $\frac{2}{3}$ din ce ia al treilea, iar al treilea $\frac{3}{4}$ din ce ia al patrulea. Să se afle câte timbre a primit fiecare elev.

9. Media aritmetică a trei numere este 28. Primul este cu 4 mai mare decât al doilea, iar media aritmetică dintre primul şi al treilea este 30. Aflaţi numerele.

10. Aflaţi 5 numere a, b. c, d, e ştiind că $\frac{1}{2}$ din media aritmetică a numerelor a, b, c, d este 22, $\frac{1}{2}$ din media aritmetică a numerelor b, c, d, e este 34, $\frac{1}{4}$ din media aritmetică a numerelor a, b, c este 8, $\frac{1}{4}$ din media aritmetică a numerelor c, d, e este 20 şi $\frac{1}{8}$ din media aritmetică a numerelor a, b, c, d, e este 7.

Rezolvaţi ecuaţiile:

11. $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)\right]\cdot\frac{1}{2}=2$

12. $\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)+2\right]-1\right\}+1=1$

13. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+...+\frac{x+99}{100}=99.$ Generalizare.

Probleme selectate de prof. Olaru Adriana - Şcoala generală nr. 5 “Nicolae Titulescu” Călăraşi